

Exercice 1 : Les chaussettes assorties

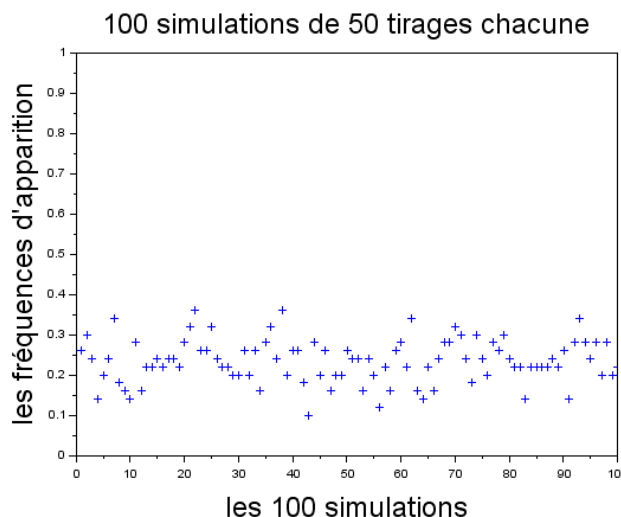
Tom a dans le tiroir de sa commode un certain nombre de chaussettes grises et de chaussettes bleues, en vrac. Lorsqu'il en tire deux au hasard dans l'obscurité, l'une après l'autre, **une fois sur deux, elles sont grises toutes les deux**.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de chaussettes contenues dans son tiroir.

1. Dans un premier temps, Tom suppose qu'avec 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises dans son tiroir, la probabilité d'obtenir deux chaussettes grises serait $p = 0,5$.

Pour tester son hypothèse, il réalise par ordinateur une simulation de 50 tirages de deux chaussettes, l'une après l'autre, dans un tiroir contenant 10 grises et 10 bleues.

Avec cet échantillon, il calcule la fréquence des couples formés de deux chaussettes grises. Puis, il répète 100 fois cette simulation et obtient le nuage de points ci-contre.



Selon vous, les résultats obtenus valident-ils l'hypothèse de Tom ?

2. On note g le nombre de chaussettes grises et b le nombre de chaussettes bleues dans le tiroir. On note p la probabilité que les deux chaussettes soient grises.
 - a) Montrer que, lorsqu'il a 4 chaussettes bleues et 12 chaussettes grises, alors $p = 0,55$.
 - b) Calculer p lorsqu'il a 7 chaussettes bleues et 18 chaussettes grises.
 - c) Dans cette question, Tom sait que le tiroir contient 204 chaussettes bleues. Il se demande combien il doit avoir de chaussettes grises pour que la probabilité de tirer deux grises soit égale à 0,5. Pour cela, il fait tourner l'algorithme ci-dessous :

Initialisation	G prend la valeur 1 P prend la valeur 0
Traitement	Tant que $P < 0,5$ G prend la valeur $G + 1$ P prend la valeur $G / (G + 204) * (G - 1) / (G + 203)$ Fin Tant que
Sortie	Afficher G, P

Quelles sont les valeurs affichées par cet algorithme en sortie ? Justifier que l'algorithme répond bien au problème de Tom.

3. Sachant que Tom a moins de 250 chaussettes bleues, trouver toutes les répartitions possibles de chaussettes grises et bleues qui conduisent à $p = 0,5$.
4. Finalement, Tom n'a, dans son tiroir, que des **paires** de chaussettes à doigts, il lui faut donc trouver une chaussette grise gauche pour le pied gauche et une chaussette grise droite pour le pied droit.

En tirant deux chaussettes au hasard de son tiroir, est-il possible que la probabilité d'obtenir une paire de chaussettes grises (une pour le pied gauche et une pour le pied droit) soit égale à 0,5 ?